Synthèses de formules

Par Dimitri PIANETA

Version 1 (2013)
Version 2 (février 2014)
Version 3 (novembre 2014)
Version 4 (avril 2015)
Version 5(septembre 2015)

Sommaire

I) Logique mathématique :

Symbole	Utilisation	Nom du symbole	Remarques et exemples
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	Signe d'implication	On peut aussi écrire $q \Leftarrow p$ Si p est vrai, alors q est aussi vrai.
$\Longleftarrow$	p $\Longleftarrow$q	Signe d'implication	Si q est vrai, alors p est aussi vrai.
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	Signe d'équivalence	
$\forall$	$\forall x \in A$	Quantificateur universel	"Pour tous"
$\exists$	$\exists x \in A$	Quantificateur existentiel	"Il existe"
$\exists!$	$\exists!\, x \in A$		Est utilisé pour indiquer l'existence d'un élément unique.
$\circ$	$f \circ g$	Fonction composée	On peut la notée aussi f(g(.))
$\in$	$x \in A$		"appartient à "
$\ni$		Contient comme élément	
$\cap$	$[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$	Interception	
$\cup$	$[0,1] \cup [1,2] = \{0,2\}$	Union	
$\subset$	A$\subset$B		A est contenu dans B.

II) Symboles divers :

Symbole	Utilisation	Sens, énoncé
=	a = b	a est égale à b
$\neq$	$a \neq b$	a est différent de b
$\stackrel{\text{def}}{=}$	$a \stackrel{\text{def}}{=} b$	a est égal par définition à b
$\equiv$	2x + x $\equiv 3x$	Équivalent à
$\triangleq$	$a \triangleq b$	a correspond à b
$\cong$	$a \cong b$	a approximativement égal à b
$\approx$	$a \approx b$	a presque égale à b
$\propto$ ou ~	$a \propto b$ ou $a \sim b$	a est proportionnel à b
<	$a<b$	a est strictement inférieur à b
>	$a >b$	a est strictement supérieur à b
$\geq$	$a \geq b$	a est supérieur ou égal à b
$\leq$	$a \leq b$	a est inférieur ou égal à b
$\gg$	$a \gg b$	a beaucoup plus grand que b
$\ll$	$a \ll b$	a beaucoup plus petit que b
// ou ‖	AB // CD	La droite AB est parallèle à la droite CD
$\perp$	AB $\perp$ CD	La droite AB est perpendiculaire à la droite CD
∞		infini
( )	Le point a, b (a,b)	A coordonnée en $\mathbb{R}^2$
[,]	[a,b]	La valeur entre a et b inclus dans l'intervalle

(,]	(a,b]	La valeur entre a et b est exclus en a et inclus en b. Similaire pour [a,n).
$\lfloor\ \rfloor$	$\lfloor x \rfloor$	Minimum de x. Proche de l'entier $\leq x$.
$\lceil\ \rceil$	$\lceil x \rceil$	Maximum de x. Proche de l'entier $\geq x$.

III) Quelques opérations:

Symbole, utilisation	Sens, énoncé	
a+b a-b	Addiction, soustraction	
$a \pm b$ $a \mp$b	Plus ou moins, moins ou plus	
a.b $a \times b$ ab	a multiplié par b	
$\frac{a}{b}$ a/b ab^{-1}		
$\sum_{i=0}^{n} a_i$	La somme	
$\prod_{k=1}^{n} a_k$	Le produit	
a^p	a exposant p	
$a^{1/2}$ $a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{a}$	Racine carrée de a	
$a^{1/n}$ $a^{\frac{1}{n}}$ $\sqrt[n]{a}$	Racine nième	
$\|a\|$	Valeur absolue de a; module de a	Pour a réel : $sgn\ a = \begin{cases} 1\ pour\ a > 0 \\ 0\ pour\ a = 0 \\ -1\ pour\ a < 0 \end{cases}$ Pour a complexe: $sgn\ a = \begin{cases} \frac{a}{\|a\|} = e^{i\ arg\ a}\ pour\ a \neq 0 \\ 0\ pour\ a = 0 \end{cases}$
Sgn a	Signum de a	
$< a, a > ou < a > ou\ \bar{a}$	Valeur moyenne de a	
n!	n factorielle	
$\binom{n}{p}\ ou\ C_n^p$	Coefficient binomial n, p	
ent a ou E(a)	Caractère de a : le plus grand nombre entier inférieur ou égal à 0	
det(A)	Déterminant de la matrice A	

IV) Fonctions:

Symbole, utilisation	Sens énoncé	Remarques et exemples
f	Fonction f	
f(x) f(x,y, …)	Valeur de la fonction f	
$[f(x)]_a^b$	f(b)-f(a)	
$f^{-1}(x)$	La fonction inverse de f(x)	
$g \circ f$	g rond f	
$x \to a$	x tend vers a	
$\simeq$	est asymptotiquement égale à	$\sin x \simeq x \; quand \; x \to a$
f(x)=O(g(x))	f est d'ordre comparable ou inférieur à g	$\lim_{x\to\infty} \sup_{y>x} \lvert f(y)/g(x) \rvert < \infty$
f(x)=o(g(x))	f est d'ordre inférieur à g	$\lim_{x\to\infty} \sup_{y>x} \lvert f(y)/g(x) \rvert = 0$
Δx	Accroissement de x	
df(x)/dx	Dérivée de la fonction f d'une variable	

V) Quelques formules :

- **Un polynôme** : est une fonction de x de la forme de $P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.
  On note P(x) de la forme générale comme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ avec a_i appartenant au domaine des Réels et imaginaires, décimales.

- **La Transformée de Fourier** : est de la forme de H(u) (traitement des signaux analogiques) suivant:

$$H(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-2iu\pi x} dx$$

- **Intégration par partie**: On la note IPP.
  Cette intégrale est la forme suivante:
  $V(x) = \int_a^b P(x)Q(x)dx$ avec P(x) et Q(x) sont deux fonctions de x.

  La méthode est la suivant que je vais employer par la suite:

  P(x)= P'(x)=
  Q'(x) = Q(x) =

  Donc la méthode IPP, nous donnes le calcul suivant:

  $V(x) = [P(x)Q(x)]_a^b - \int_a^b P'(x)Q(x)dx$
  Ce qui nous donne maintenant :

$$V(x) = P(x)_b Q(x)_b - P(x)_a Q(x)_a - \int_a^b P'(x)Q(x)dx$$

- **Formule d'Euler**:

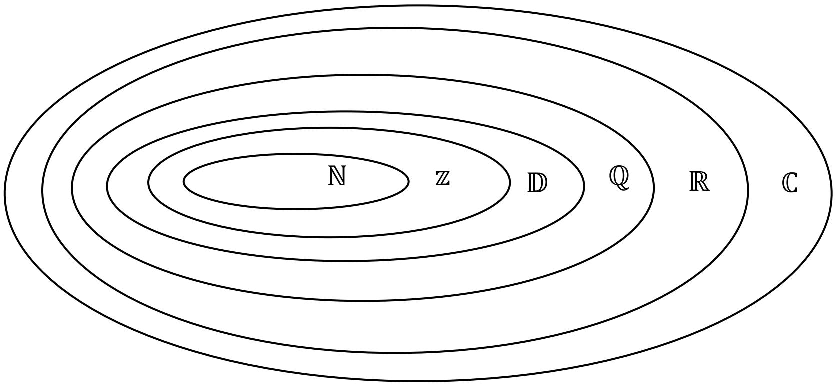
$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

- **Sinus cardinale**:

$$sinc(\pi u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$$

VI) Ensemble de nombre :

On définit un ensemble s de nombre par le symbole Ω :
Voici l'ordre de rangement de l'ensemble de nombre:



Symbole	Appellation
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entier relatifs
$\mathbb{D}$	Ensemble des décimaux
$\mathbb{Q}$	Ensemble des rationnels
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des complexes

Soit $\Omega \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

<u>Définitions:</u>

1. Un entier naturel est un nombre entier et positif.
Tous les entiers naturels forment un ensemble noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$.

Ex: $26 \in \mathbb{N}$ $se\ lit$ appartient à N.

2. Un entier relatif est un nombre pouvant être positif ou négatif.
Tous les entiers relatifs forment l'ensemble noté $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

3. Un nombre décimal est un quotient d'un nombre entier par un puissance de 10.
Ex: $3{,}2 = \frac{32}{10^1}$ $est\ un\ nombre\ décimal.$
Remarque: *Un nombre décimale est un nombre dont la partie décimale est finie, c'est-à-dire qui n'a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.*

4. Un nombre rationnel est un quotient de deux nombres: $\frac{p}{q}$ $tel\ que\ p \in \mathbb{Z}\ et\ q \in \mathbb{N}$
Exemple 2/3 est un nombre rationnel.

5. Un nombre réel est tout les nombres qui appartiennent à l'ensemble des points précédents définis.

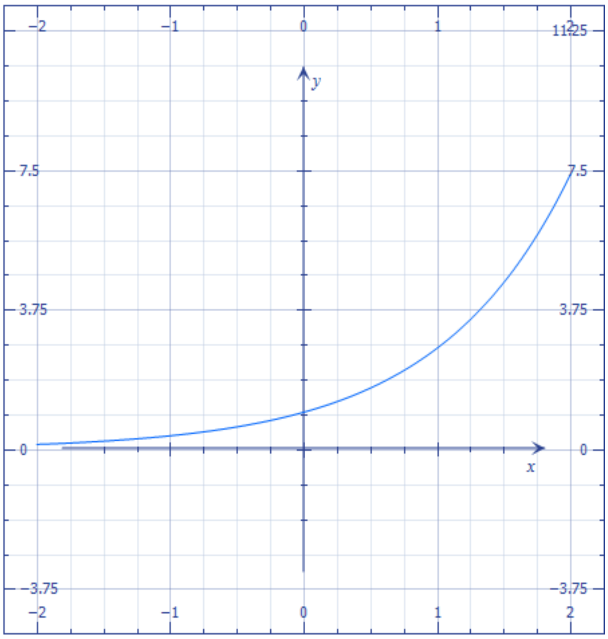
6. Un nombre imaginaire est un nombre réel de la racine $i^2 = -1$, donc de l'écriture $a+i^2b$.

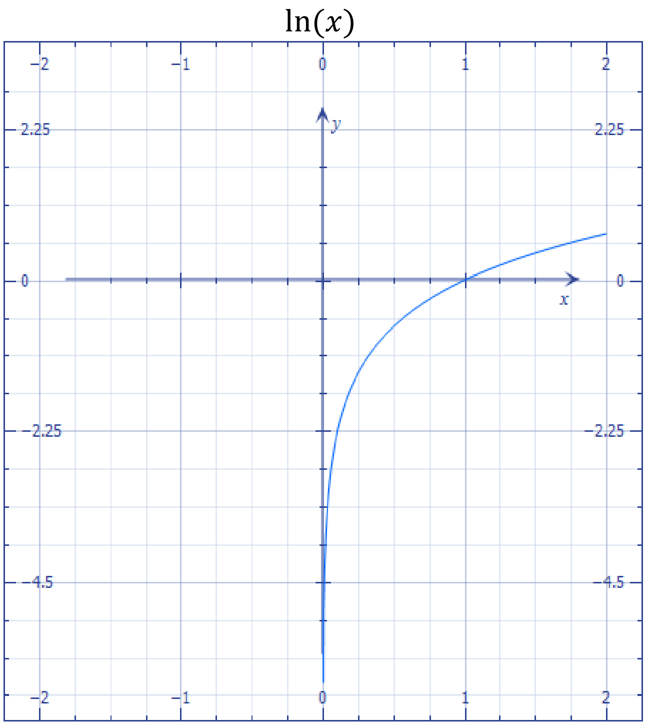
VII) Fonctions exponentielles et logarithmiques:

Symbole, utilisation	**Sens, énoncé**
e^x exp(x)	Exponentielle de base de x
$log_a x$	Logarithme de base de a
ln (x)	Logarithme népérien
lg(x)	Logarithme décimal de x : lg x = $\log_{10}$ x
lb(x)	Logarithme binaire de x : lb x = $\log_2$ x

Les courbes:

e^x





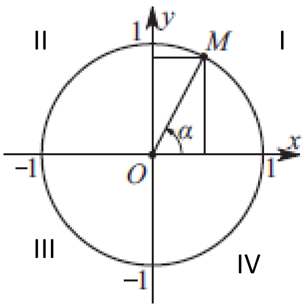
Quelques propriétés:

$e^{ax}.e^{bx} = e^{(a+b)x}$
$\ln(ax).\ln(bx) = \ln[\mathrm{a} + b]\, x$
$\ln(ax)\,/\,\ln(bx) \;= \ln ax - \ln bx$

VII) Formule trigonométriques:

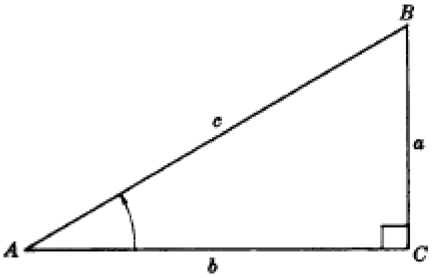
<u>Le cercle trigonométrique:</u>

Le cercle trigonométrique est un cercle d'unité rayon avec le centre à l'origine d'un système coordonné orthogonale Oxy. Les axes de coordonnées sont divisées en quatre quartier du cercle (quadrants). On considère la rotation de rayon polaire issu de l'origine O et d'un point M du cercle trigonométrique. Soit α l'angle entre l'axe x et le rayon polaire OM mesuré de direction positive d'axe x. Cet angle est assimilé positive dans le cas du sens de rotation contraire à l'aiguille d'une montre (appelé sens trigonométrique) et négative dans le cas du sens de rotation d'une aiguille d'une montre.



Définition d'une fonction trigonométrique:

Soit un triangle ABC avec un angle droit de 90° en C.



- sinus de A: $\sin(A) = \frac{a}{c} = \frac{côté\ opposé}{côté\ hypothénuse}$
- cosinus de A: $\cos(A) \ = \frac{b}{c} = \frac{côté\ adjacent}{côté\ hypothénuse}$
- tangente de A : $\tan(A) = \frac{a}{b} = \frac{côté\ opposé}{côté\ adjacent}$
- cotangente de A : cot A$= \frac{b}{c} = \frac{côté\ adjacent}{côté\ opposé}$
- secant de A: sec A$= \frac{c}{b} = \frac{côté\ hypothénuse}{côté\ adjacent}$
- cosecant de A : csc A $= \frac{c}{a} = \frac{côté\ hypothénuse}{côté\ opposé}$

Relations degrés, radians et grades:

- 1 radian $= \frac{180°}{\pi} = 57{,}29577\ 95130\ 8232\ ...°$
- 1°$= \frac{\pi}{180} radians = 0{,}01745\ 32925\ 19943\ 29576\ 92..radians$
- 1 grad $= \frac{9}{10} n\ (avec\ n\ en\ grade)\ pour\ donner\ des\ dégrés$
- Soit 90° est égale à 100 grades.
- 1 grad $= \frac{\pi}{200}$ n $radians\ (avec\ n\ en\ grade)$

Formules de trigonométrie circulaire:

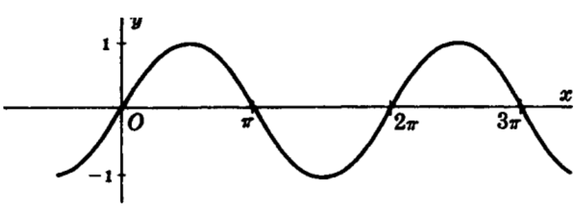
Soit a, b, p, q, x, y $\in \mathbb{R}$ (tels que les fonctions soient bien définies) et $n \in \mathbb{R}$.
Valeurs remarquables :

x(rad)	**0**	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\pi}$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot(x)	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

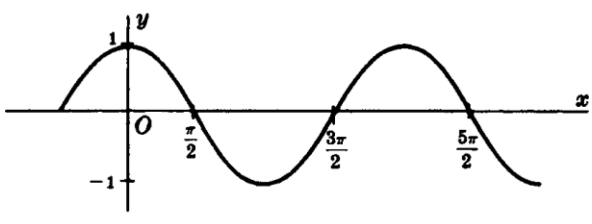
Angle en degré (x)	Angle en radian (x)	sin(x)	cos(x)	tan(x)	cot(x)	sec(x)	csc(x)
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105°	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
165°	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
180°	π	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
195°	$\frac{13\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$;
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
255°	$\frac{17\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
285°	$\frac{19\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
345°	$\frac{23\pi}{12}$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

Graphe des fonctions trigonométrique :

y = sin(x)

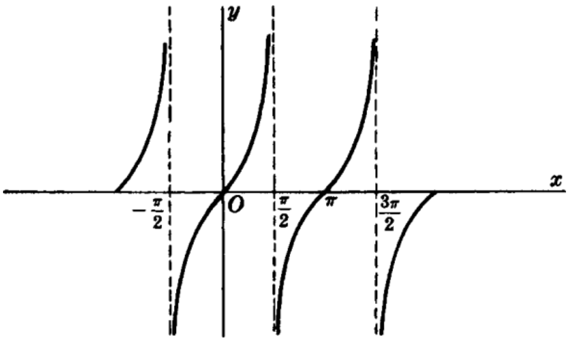


y = cos(x)

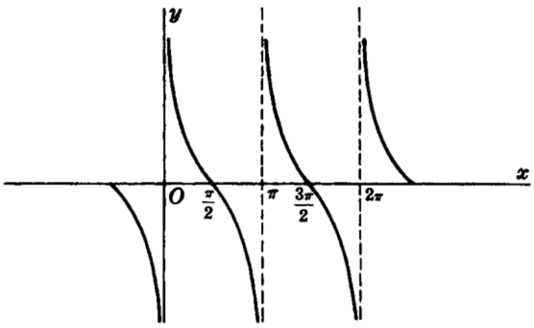


y = tan(x)

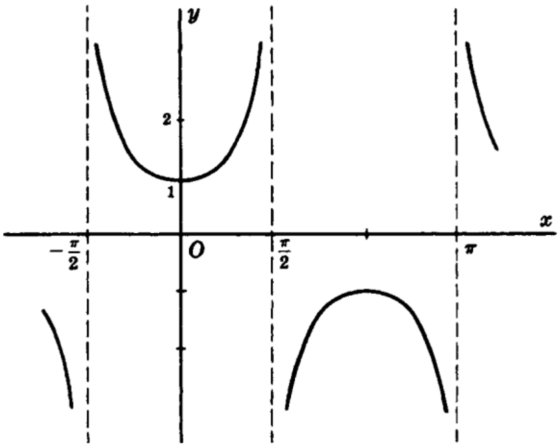
y = cot(x)

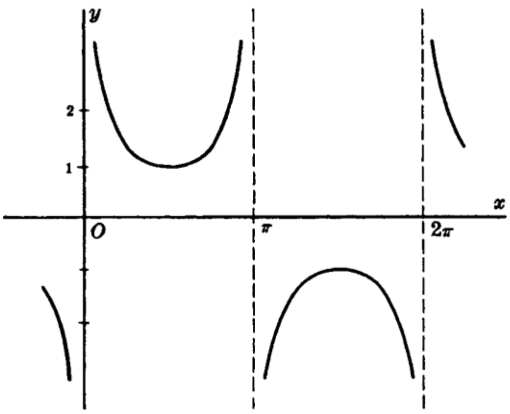


y = sec(x)



y = csc(x)





Signes des fonctions trigonométriques :

Quartier	Angle en radians	sin x	cos x	tan x	cot x	sec x	cossec x
I	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	-	-	-	-	+
III	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	-	+	+	-	-
IV	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	-	+	-	-	+	-

Relations fondamentales :

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ $\quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ $\quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$ $\quad -\frac{d}{dx} cotan(x) = 1 + cotan^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$

$sec^2(x) - tan^2(x) = 1$ $\quad csc^2(x) - cot^2(x) = 1$

$$\frac{d}{dx} tan(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$Arccos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ $\quad Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(x) * \frac{\pi}{2}$ (si x<0 $-\frac{\pi}{2}$ sinon $\frac{\pi}{2}$)

Arctan(x)+Arccotan(x)= $\frac{\pi}{2}$

Relations d'Euler :

$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

Relations de Moivre :

$e^{inx} = (\cos(x) + i\sin(x))^{n} = \cos(nx) + isin(nx)$, i^2=-1

$\sin(ix) = i\sinh(x)$, $\cos(ix) = \cosh(x)$,

$\tan(ix) = i\tanh(x)$, $\cot(ix) = -i\coth(x)$

Formules d'addition :

sin(x+y) = sin(x).cos(y)+sin(x).sin(y)
sin(x-y) = sin(x).cos(x)-sin(y).cos(x)
cos(x+y) = cos(x).cos(y)-sin(x).sin(y)
cos(x-y) = cos(x).cos(y)+sin(x).sin(y)

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, . \tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \, . \tan y}$$

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

Formules d'angle double:

cos(2x) = $\cos^2$(x)-$\sin^2$(x) = 2$\cos^2$(x)-1= 1-2$\sin^2$(x)
sin(2x)=2sin(x).cos(x)

$$\tan(2\mathrm{x}) = \frac{2\tan(\mathrm{x})}{1-\tan^2(\mathrm{x})}$$

Formules du demi-angle

$cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)} = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ $\cot\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

En posant t= tan(x/2) pour $x \neq \pi$ (à 2π $près$), on a : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t^2}{1+t^2}$,

$$\tan(x) = \frac{2t^2}{1-t^2}$$

Somme, différence et produit :

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}\{\cos(p-q)-\cos(p-q)\}$
$\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\{\cos(p-q)+\cos(p-q)\}$
$\sin(p)\cos(q) = \frac{1}{2}\{\sin(p-q)+\sin(p-q)\}$

$sin^2(p)-sin^2(q) = \cos^2(q)-cos^2(p) = \sin(p+q)\sin(p-q)$
$sin^2(p)-cos^2(q) = -\cos(p+q)\cos(p-q)$

$\tan(p)+\tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p).\cos(q)}$ $\quad\tan(p)-\tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p).\cos(q)}$
$\cot(p)+\cot(y) = \frac{\sin(q+p)}{\sin(p)\sin(q)}$ $\quad\cot(p)-\cot(y) = \frac{\sin(q-p)}{\sin(p)\sin(q)}$

Multiple angle :

$\sin nx = \sin x\{\,(2\cos x)^{n-1} - \binom{n-2}{1}(2\cos x)^{n-3} + \binom{n-3}{1}(2\cos x)^{n-5} - \cdots\}$
$\cos nx = \frac{1}{2}\left\{(2\cos x)^n - \frac{n}{1}(2\cos x)^{n-2} + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}(2\cos x)^{n-4} - \frac{n}{3}\binom{n-4}{1}(2\cos x)^{n-6} + \cdots\right\}$
$\cos(2nx) = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{(2k)!}4^k sin^{2k}x$
$\cos[(2n+1)x] = \cos(x)\{\,1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{[(2n+1)^2-1][(2n+1)^2-3^2]\ldots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k)!}sin^{2k}x\}$
$\sin(2nx) = 2n\cos(x)\,[\sin(x) + \sum_{k=1}^{n}(-4)^k\frac{(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots(n^2-k^2)}{(2k-1)!}sin^{2k-1}x]$
$$\sin[(2n+1)x] = (2n+1)\{\sin(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{[(2n+1)^2-1][(2n+1)^2-3^2]\ldots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!}sin^{2k+1}x\}$$
Où n =1, 2, …

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
$\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$
$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
$\tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}$
$\tan 4x = \frac{\tan^5 x - 10\tan^3 x + 5\tan x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}$

Puissance des fonctions trigonométriques :

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{k}\cos(2(n-k)x] + \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{m}$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{k}\cos[(2n-2k+1)x]$$

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_{2n}^{k}\cos(2(n-k)x] + \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{m}$$

$$\sin^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{2n+1}^{k}\sin[(2n-2k+1)x]$$

Avec n = 1, 2, … et le coefficient binomial (0!=1) est $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$

$$\sin^{2n-1} x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\left\{\sin(2n-1)\,x - \binom{2n-1}{1}\sin(2n-3)\,x + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}\sin x\right\}$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}}\left\{\cos(2n-1)\,x + \binom{2n-1}{1}\cos(2n-3)\,x + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}\cos x\right\}$$

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left\{\cos(2n)\,x - \binom{2n}{1}\cos(2n-2)\,x + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\cos 2x\right\}$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\cos(2n)\,x + \binom{2n}{1}\cos(2n-2)\,x + \cdots + \binom{2n}{n-1}\cos 2x\right\}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\sin^5 x = \frac{5}{8}\sin x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{1}{16}\sin 5x$$

$$\cos^5 x = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x$$

Dérivées :

cos’(x)= $\frac{d\cos x}{dx}$ = -sin(x)

sin’(x) = $\frac{d\ sin\ x}{dx}$= cos(x)

$tan'(x) = \frac{d\ tan\ x}{dx} = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$

cot'(x) = $\frac{d\ cot\ x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

$arc\sin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad arc\ \cos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad arc\ \tan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Intégrales :

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\quad \int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

Avec C qui est une constante

Transformations simples sur x :

sin(-x) = -sin(x)	cos(-x) = cos(x)	tan(-x) = -tan(x)
csc(-x) = -csc(x)	sec(-x) = sec(x)	cot(-x) = -cot(x)

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=cos(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cos(x)$	$\sin(\pi-x)=sin(x)$	sin(-x)=-sin(x)
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-sin(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sin(x)$	$\cos(\pi-x)=-cos(x)$	cos(-x)= cos(x)
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=cotan(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cotan(x)$	$\tan(\pi-x)=-\tan(x)$	tan(-x)= -tan(x)

$\sin(x\pm 2n\pi)=\sin(x)$

$\sin(x\pm n\pi)=(-1)^{\mathrm{n}}\sin(x)$

$\sin\left(x\pm\frac{2n+1}{2}\pi\right)=\pm(-1)^{\mathrm{n}}\cos(x)$

$\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(x)\pm\cos(x))$

$\tan(x\pm n\pi)=\tan(x)$

$\tan\left(x\pm\frac{2n+1}{2}\pi\right)=-\cot(\mathrm{x})$

$\tan\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan(x)\pm1}{1\mp\tan(x)}$

$\cos(x\pm 2n\pi)=\cos(x)$

$\cos(x\pm n\pi)=(-1)^{\mathrm{n}}\cos(x)$

$\cos\left(x\pm\frac{2n+1}{2}\pi\right)=\pm(-1)^{\mathrm{n}}\sin(x)$

$\cos\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x)\mp\sin(x))$

$\cot(x\pm n\pi)=\cot(x)$

$\cot\left(x\pm\frac{2n+1}{2}\pi\right)=-\tan(\mathrm{x})$

$\cot\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cot(x)\pm1}{1\mp\cot(x)}$

Où n = 1, 2, …

Relation entre fonction trigonométrique d'un simple argument :

$$\sin(x)=\pm\sqrt{1-cos^2(x)}=\pm\frac{\tan(x)}{\sqrt{1+tan^2(x)}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+cot^2(x)}}=\frac{\sqrt{sec^2(x)-1}}{\sec(x)}=\frac{1}{\csc(x)}$$

$$\cos(x)=\pm\sqrt{1-sin^2(x)}=\pm\frac{\cot(x)}{\sqrt{1+cot^2(x)}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tan^2(x)}}=\frac{\sqrt{csc^2(x)-1}}{\csc(x)}=\frac{1}{\sec(x)}$$

$$\tan(x)=\pm\sqrt{sec^2(x)-1}=\pm\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-sin^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{csc^2(x)-1}}=\pm\frac{\sqrt{1-cos^2(x)}}{\cos(x)}$$
$$=\frac{1}{\cot(x)}$$

$$\cot(x)=\pm\sqrt{csc^2(x)-1}=\pm\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-cos^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{sec^2(x)-1}}=\pm\frac{\sqrt{1-sin^2(x)}}{\sin(x)}=$$
$$=\frac{1}{\tan(x)}$$

$$\sec(x)=\sqrt{1+tan^2(x)}=\frac{\csc(x)}{\sqrt{csc^2(x)-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-sin^2(x)}}=\frac{\sqrt{1+cot^2(x)}}{\cot(x)}=\frac{1}{\cos(x)}$$

$$\sec(x)=\sqrt{1+cot^2(x)}=\frac{\sec(x)}{\sqrt{sec^2(x)-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-cos^2(x)}}=\frac{\sqrt{1+tan^2(x)}}{\tan(x)}=\frac{1}{\sin(x)}$$

Développement limité :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots \qquad (|x| < \tfrac{\pi}{2})$$
$$\cot x = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \cdots + \frac{2^{2n}|B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots\right) \qquad (0 < |x| < \pi)$$

Où B_n sont les nombres de Bernouilli.

Je rappel ces nombres de Bernouilli qui sont définit par la relation récurrente :
Soit B_0=1, $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, n = 2, 3, ...$
Les valeurs sont alors,

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, ...$$

B_{2m+1} =0 pour m = 1, 2, ...

<u>Représentation dans la forme de produit infini :</u>

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)...\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)...$$
$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)...\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)...$$

VIII) Formule inverse trigonométriques:

<u>Les notations:</u>

$\arcsin x \equiv \sin^{-1} x$ (arcsinus est l'inverse de sinus)
$\arccos x \equiv \cos^{-1} x$ (arccosinus est l'inverse de cosinus)
$\arctan x \equiv \tan^{-1} x$ (arctangente est l'inverse de tangente)
$\text{arccot}\, x \equiv \cot^{-1} x$ (arccotangente est l'inverse de la cotangente)

<u>Les relations de base:</u>

sin(arsin x) = x cos(arccos x) = x tan(arctan x) = x cot(arcot x) = x

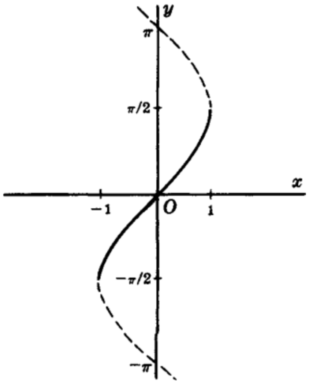
<u>Les inégalités :</u>

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq arcos\ x \leq \pi \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq \frac{\pi}{2}, 0 < arcot\ x < \pi \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

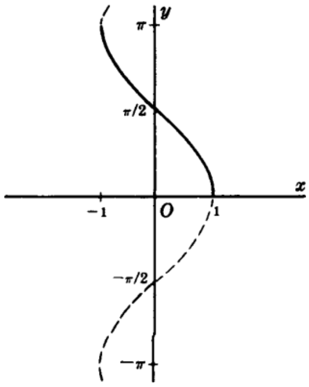
$$y = \arcsin x, \quad -1 \leq x < 1 \quad \Leftrightarrow x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$
$$y = \arccos x, \quad -1 \leq x < 1 \quad \Leftrightarrow x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$
$$y = \arctan x, \quad -\infty \leq x < +\infty \quad \Leftrightarrow x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$
$$y = \text{arccot}\, x, \quad -\infty \leq x < +\infty \quad \Leftrightarrow x = \cot y, \quad 0 < y < \pi$$

Les courbes:

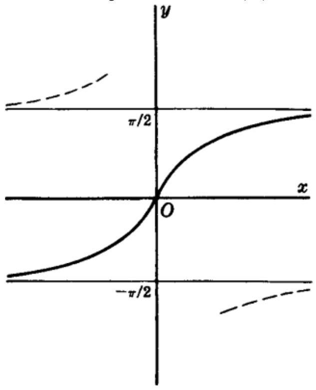
y = arcsin(x)



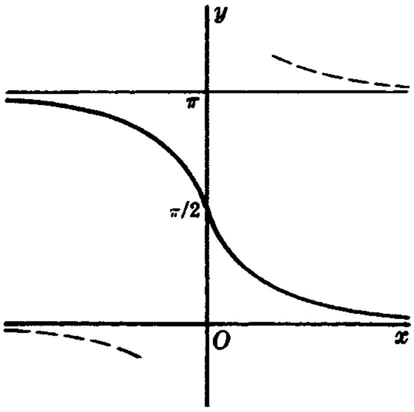
y = arccos(x)



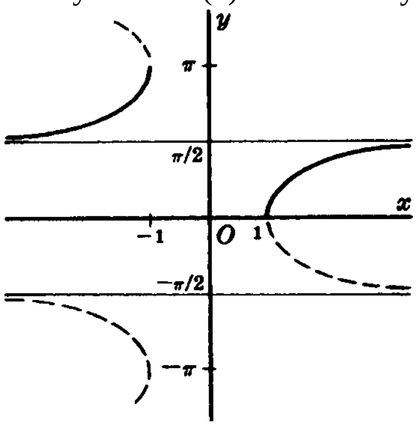
y = arctan(x)



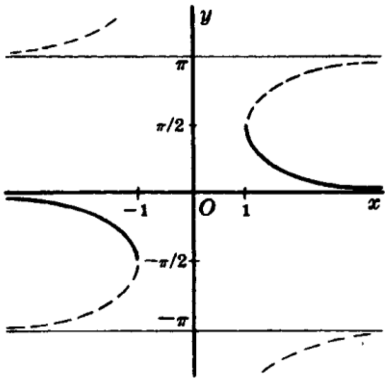
y = arccot(x)



y = arcsec(x)



y = arccsc(x)



Les relations entre les fonctions trigonométriques:

$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$\csc^{-1}(x) = \sin^{-1}(\frac{1}{x})$

$\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}(\frac{1}{x})$

$\cot^{-1}(x) = \tan^{-1}(\frac{1}{x})$

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$

$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}(x)$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}(x)$

$\csc^{-1}(-x) = -\csc^{-1}(x)$

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2} \quad si\ 0 \leq x \leq 1 \\ -\arccos\sqrt{1-x^2} \quad si -1 \leq x \leq 0 \\ \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad si -1 < x < 1 \\ \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi\ si -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\ \sqrt{1-x^2} \quad si\ 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - \arcsin\ \sqrt{1-x^2} \quad si -1 \leq x \leq 0 \\ \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad si\ 0 < x < 1 \\ \operatorname{arccot}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad si -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\arctan x = \begin{cases} \arcsin\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad pour\ tous\ x \\ \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad si\ x \geq 0 \\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad si\ x \leq 0 \\ \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x} \quad si\ x > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{arccot} x = \begin{cases} \arcsin\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad si\ x > 0 \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad si\ x < 0 \\ \arctan\dfrac{1}{x} \quad si\ x > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{1}{x} \quad si\ x < 0 \end{cases}$$

Addictions et soustractions:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad pour\ x^2 + y^2 \leq 1$$
$$\arccos x \pm \arccos y = \pm\arccos[xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}] \quad pour\ x \pm y \geq 0$$
$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \quad pour\ xy < 1$$
$$\arctan x - \arctan y = \arctan\frac{x-y}{1+xy} \quad pour\ xy > -1$$

Dérivées:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

Intégrales:

$$\int \arcsin x\ dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \qquad \int \arccos x\ dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \arctan x\ dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Avec C la constance

D.L.:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\times 3\times \ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (|x|<1),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad (|x|<1),$$

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots + \frac{(-1)^n 1}{(2n-1)x^{2n-1}} + \cdots \quad (|x|>1)$$

L'extension pour trouver :
$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ et $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

IX) Fonction hyperbolique:

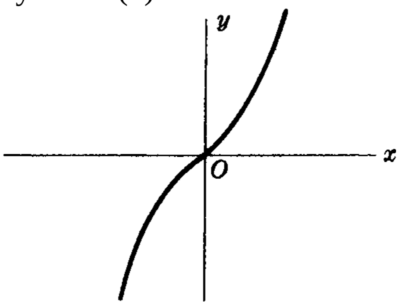
Définitions:

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (cotangent)

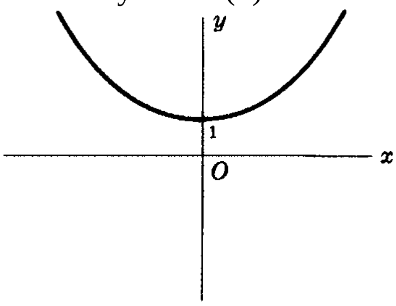
$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ (secant) $\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ (cosecant)

Les courbes:

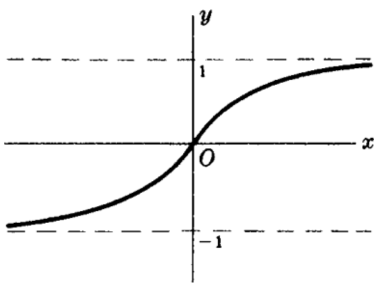
y = sinh(x)



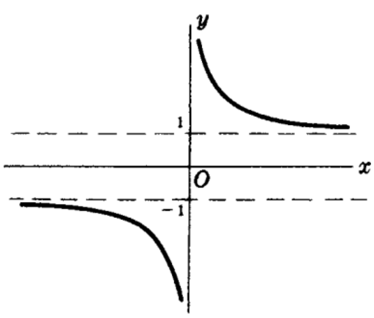
y = cosh(x)



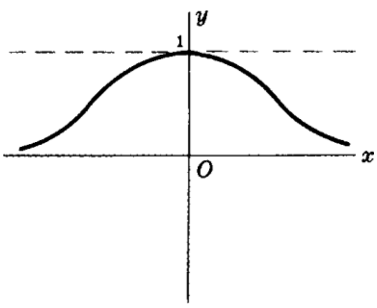
y = tanh(x)



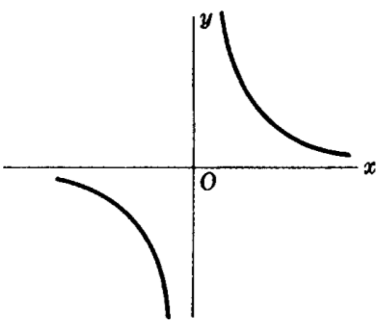
y = coth(x)



y = sech(x)



y = csch(x)



Relations de fonctions hyperboliques:

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ $\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}$ $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ $\operatorname{csch}\ x = \frac{1}{\sinh x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$ $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

Fonctions négative:

$\sinh(-x) = -\sinh(x)$ $\cosh(-x) = \cosh(x)$ $\tanh(-x) = -\tanh(x)$
$\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch}(x)$ $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x)$ $\coth(-x) = -\coth(x)$

Relations entre fonctions hyperboliques pour $(x \geq 0)$:

$$\sinh x = \sqrt{\cosh^2(\mathrm{x}) - 1} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$
$$\cosh x = \sqrt{\sinh^2(\mathrm{x}) + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{\coth(x)}{\sqrt{\coth^2(x) - 1}}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}$$
$$\operatorname{cothh} x = \frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x} = \frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\tanh x}$$

Addition:

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$ $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh y \sinh x$
$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$ $\coth(x \pm y) = \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}$

Addition et soustraction:

$$\sinh \mathrm{x} \pm \sinh \mathrm{y} = 2 \sinh\left(\frac{\mathrm{x} \pm \mathrm{y}}{2}\right) \cosh\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$$
$$\cosh \mathrm{x} + \cosh \mathrm{y} = 2 \cosh\left(\frac{\mathrm{x} + \mathrm{y}}{2}\right) \cosh\left(\frac{x - y}{2}\right)$$
$$\cosh \mathrm{x} - \cosh \mathrm{y} = 2 \sinh\left(\frac{\mathrm{x} + \mathrm{y}}{2}\right) \sinh\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$\sinh^2 x - \sinh^2 x = \cosh{}^2 x - \cosh^2 y = \sinh(x + y) \sinh(x - y)$
$\sinh^2 x + \cosh^2 y = \cosh(x + y) \cosh(x - y)$
$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx)$
$\tanh x \pm \tanh y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}$ $\coth x \pm \coth y = \pm \frac{\sinh(x \pm y)}{\sinh x \sinh y}$

$$o\grave{u}\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Produits :

$$\sinh x \sinh y = \frac{1}{2}[\cosh(x + y) - \cosh(x - y)]$$

$$\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)]$$
$$\sinh x \cosh y = \frac{1}{2}[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)]$$

Puissances:

$$\cosh^{2\mathrm{n}} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{k} \cosh[2(n-k)x] + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n}$$
$$\cosh^{2\mathrm{n}+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{k} \cosh[(2n-2k+1)x]$$
$$\sinh^{2\mathrm{n}} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^{k} \cosh[2(n-k)x] + \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C_{2n}^{n}$$

$$\sinh^{2\mathrm{n}+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{k} \cosh[(2n-2k+1)x]$$

Où n =1, 2, … et C_m^k sont les coefficients binomiaux

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}$

$\cosh^3 x = \frac{1}{4}\cosh 3\mathrm{x} + \frac{3}{4}\cosh x$

$\cosh^4 x = \frac{1}{8}\cosh 4\mathrm{x} + \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{3}{8}$

$\cosh^5 x = \frac{1}{16}\cosh 5\mathrm{x} + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{5}{8}\cosh x$

$\sinh^2 x = \frac{1}{2}\sinh 2x - \frac{1}{2}$

$\sinh^3 x = \frac{1}{4}\cosh 3\mathrm{x} - \frac{3}{4}\sinh x$

$\sinh^4 x = \frac{1}{8}\sinh 4\mathrm{x} + \frac{1}{2}\sinh 2x + \frac{3}{8}$

$\sinh^5 x = \frac{1}{16}\sinh 5\mathrm{x} + \frac{5}{16}\sinh 3x + \frac{5}{8}\sinh x$

Multiples:

$$\cosh nx = 2^{n-1}\cosh^{\mathrm{n}} x + \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} C_{n-k-2}^{k-2}\, 2^{n-2k-2} (\cosh x)^{n-2k-2}$$
$$\sinh nx = \sinh x \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-k-1}\, C_{n-k-1}^{k}\, 2^{n-2k-2} (\cosh x)^{n-2k-1}$$

Où n =1, 2, … et C_m^k sont les coefficients binomiaux

$\cosh 2x = 2\cosh{}^2 x - 1$

$\cosh 3x = -3\cosh x + 4\cosh^3 x$

$\cosh 4x = 1 - 8\cosh^2 x + 8\cosh^4 x$

$\cosh 5x = 5\cosh x - 20\cosh^3 x + 16\cosh^5 x$

$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

$\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$

$\sinh 4x = 4\cosh(x)\,(\sinh x + 2\sinh^3 x)$

$\sinh 5x = 5\sinh x + 20\sinh^3 x + 16\sinh^5 x$

$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh{}^2 x}$$
$$\tanh 3x = \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3\tanh{}^2 x}$$

$$\tanh 4x = \frac{4\tanh x + 4\tanh^3 x}{1 + 6\tanh^2 x + \tanh^4 x}$$

Angle double:

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$$
$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

Angle 1/2:

$$\sinh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \quad [+si\ x > 0, -si\ x < 0]$$
$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$
$$\tanh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} \quad [+si\ x > 0, -si\ x < 0] = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$$

Expression transverse:

$$\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x}}{\operatorname{sech} x} = \frac{1}{\operatorname{csch} x}$$
$$\cosh x = \sqrt{1 + \cosh^2 x} = \frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}}{\operatorname{csch} x} = \frac{1}{\operatorname{sech} x}$$
$$\tanh x = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 + \tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}$$
$$\coth x = \sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x} = \frac{\cosh x}{\sqrt{1 + \cosh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x}} = \frac{\sqrt{\sinh^2 x + 1}}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \sqrt{1 - \tanh^2 x} = \frac{\operatorname{csch} x}{\sqrt{1 + \cosh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{\sqrt{\coth^2 x - 1}}{\coth x} = \frac{1}{\cosh x}$$
$$\operatorname{csch} x = \sqrt{\coth^2 x - 1} = \frac{\operatorname{sech} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}{\tanh x} = \frac{1}{\sinh x}$$

Dérivées:

$$d\frac{\sinh x}{dx} = \cosh x \quad d\frac{\cosh x}{dx} = \sinh x \quad d\frac{\tanh x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad d\frac{\coth x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

Intégrales:

$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\, dx = \sinh x + C$

$\int \tanh x\, dx = \ln \cosh x + C \qquad \int \tanh x\, dx = \ln|\sinh \mathrm{x}| + \mathrm{C}$

D.L.:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (|x| < \infty)$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad (|x| < \frac{\pi}{2})$$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}|B_{2n}|x^{2n-1}}{(2n)!}$$

Avec B_n le nombre de Bernoulli.

Relations de trigonométrie:

$\sinh(ix) = isin\, x \qquad \cosh(ix) = \cos x \qquad \tanh(ix) = itan\, x \qquad \coth(ix) = -icotx, \quad i^2 = -1$

$\sin(ix) = i \sinh x \quad \cos(ix) = \cosh x \quad \tan(ix) = i \tanh x \quad \csc(ix) = -i\,\mathrm{csch}\, x \quad \sec(ix) = \mathrm{sech}\, x$

Périodicité :

$\sinh(\mathrm{x} + 2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}) = \sinh \mathrm{x} \qquad \cosh(\mathrm{x} + 2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}) = \cosh \mathrm{x} \qquad \tanh(\mathrm{x} + \mathrm{k}\pi\mathrm{i}) = \tanh \mathrm{x}$

$\mathrm{csch}(\mathrm{x} + 2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}) = \mathrm{csch}\, \mathrm{x} \qquad \mathrm{sech}(\mathrm{x} + 2\mathrm{k}\pi\mathrm{i}) = \mathrm{sech}\, \mathrm{x} \qquad \coth(\mathrm{x} + \mathrm{k}\pi\mathrm{i}) = \coth \mathrm{x}$

X) Fonction arc trigonométrique:

Les notations:

$\mathrm{arcsinh}\, x \equiv \sinh^{-1} x$ (inverse du sinus hyperbolique)
$\mathrm{arccosh}\, x \equiv \cosh^{-1} x$ (inverse du cosinus hyperbolique)
$\mathrm{arctanh}\, x \equiv \tanh^{-1} x$ (inverse du tangente hyperbolique)
$\mathrm{arccoth}\, x \equiv \coth^{-1} x$ (inverse du cotangente hyperbolique)

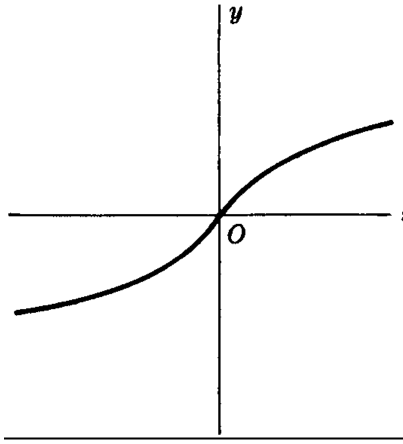
Les relations de bases:

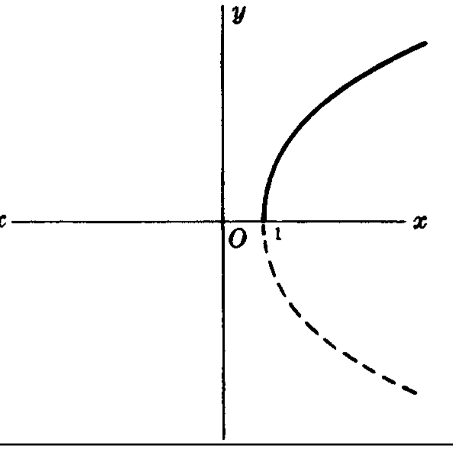
$\mathrm{arcsinh}(-x) = -\mathrm{arcsinh}\, x \quad \mathrm{arctanh}(-x) = -\mathrm{arctanh}\, x \quad arcoth(-x) = -arcoth(x)$

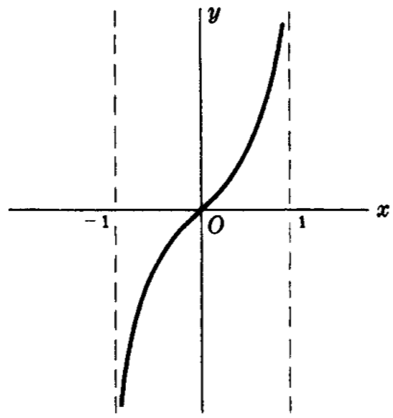
$\mathrm{arccsch}\, x = \arcsin \frac{1}{x} \quad \mathrm{arcsech}\, x = \mathrm{arccosh} \frac{1}{x} \quad \mathrm{arccoth}\, x = \mathrm{arctanh} \frac{1}{x}$

Les courbes:

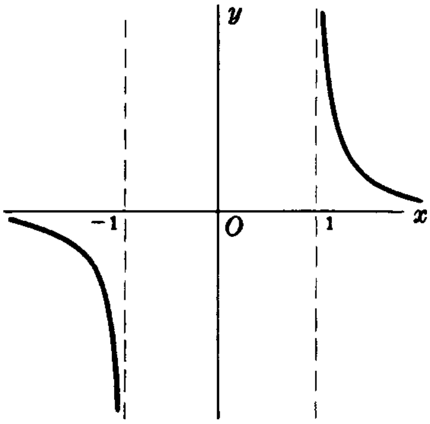
y=sinh^{-1} x y=cosh^{-1} x y = tanh^{-1} x



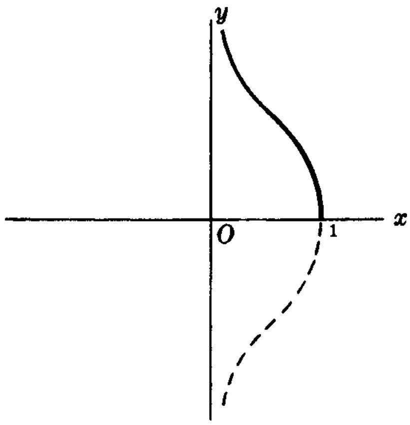




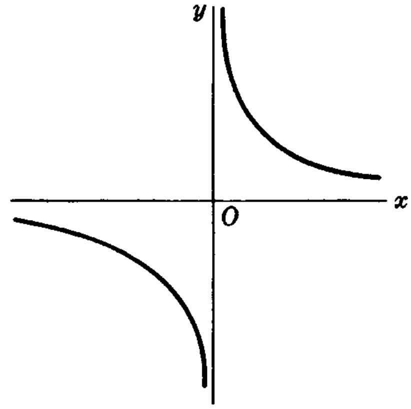
y = coth^{-1}x



y= sech^{-1} x



y = csch^{-1} x



Relations:

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 0$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{arccottanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad x > 1 \; ou \; x < -1$$

$$\operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \qquad 0 < x \leq 1$$

$$\operatorname{arccsch}(x) = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) \qquad x \neq 0$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \operatorname{arccosh}\sqrt{x^2+1} = \operatorname{arctanh}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\operatorname{arccosh} x = \operatorname{arcsinh}\sqrt{x^2-1} = \operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\operatorname{arctanh} x = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arccoth}\frac{1}{x}$$

Addition et soustraction:

$$\operatorname{arcsinh} x \pm \operatorname{arcsinh} y = \operatorname{arcsinh}\left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\operatorname{arccosh} x \pm \operatorname{arcosh} y = \operatorname{arccosh}\left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right)$$
$$\operatorname{arcsinh} x \pm \operatorname{arccosh} y = \operatorname{arcsinh}\left(xy \pm \sqrt{(x^2+1)(y^2-1)}\right)$$

$$\operatorname{arctanh} x \pm \operatorname{arctanh} y = \operatorname{arctan}\tfrac{x\pm y}{1\pm xy} \quad \operatorname{arctanh} x \pm \operatorname{arccoth} y = \operatorname{arctanh}\tfrac{xy\pm 1}{y\pm x}$$

Dérivées:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (x^2<1) \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (x^2>1)$$

Intégrales:

$$\int \operatorname{arcsinh} x\, dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{1+x^2} + C$$
$$\int \operatorname{arccosh} x\, dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2-1} + C$$
$$\int \operatorname{arctanh} x\, dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$
$$\int \operatorname{arccoth} x\, dx = x \operatorname{arccoth} x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + C$$

D.L.:

$$\operatorname{arcsinh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad (|x|<1)$$
$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(2x) + \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{1}{4x^4} - \cdots + \frac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)}\frac{1}{2nx^{2n}} + \cdots \qquad (|x|>1)$$
$$\operatorname{arccosh} x = \ln(2x) + \frac{1}{2}\frac{1}{2x^2} - \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{1}{4x^4} - \cdots + \frac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)}\frac{1}{2nx^{2n}} + \cdots \qquad (|x|>1)$$
$$\operatorname{arctanh} x = x + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad (|x|<1)$$
$$\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \cdots \qquad (|x|<1)$$

XI) Dérivées:

Définitions:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Lois:

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$
$$\frac{d(cx)}{dx} = c$$
$$\frac{d(cx^n)}{dx} = ncx^{n-1}$$

$$\frac{d(u \pm v \pm w \pm \cdots)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$
$$\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$
$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$
$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Trigonométrie et inverse trigonométrie:

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\cos^2 u} = \left(\frac{du}{dx}\right)(1 + \tan^2 u)$$
$$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} u < +\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad [0 < \cos^{-1} u < \pi]$$
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} u < +\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \quad [0 < \cot^{-1} u < \pi]$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}\begin{bmatrix} + si\ 0 < \sec^{-1}u < \frac{\pi}{2} \\ - si\ \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}u < \pi \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} = \frac{\mp 1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}\begin{bmatrix} - si\ 0 < \csc^{-1}u < \frac{\pi}{2} \\ + si\ \frac{-\pi}{2} < \csc^{-1}u < 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos\ u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin u = \frac{1}{u^2+1}\frac{du}{dx}$$

Exponentielle et logarithmique:

$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx}$ $\quad a \neq 0,1$ or e= 2,71828....

$$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{d}{dx}\log_e u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}u^v = \frac{d}{dx}e^{v\ln u} = e^{v\ln u}\frac{d}{dx}[v\ln u] = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v\ln u\frac{dv}{dx}$$

Hyperbolique et inverse hyperbolique

$$\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u\tanh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u\coth u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}u = \frac{\pm 1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \begin{bmatrix} + si\cosh^{-1}u > 0, u > 1 \\ - si\cosh^{-1}u < 0, u > 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \qquad [-1 < u < 1]$$

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1}u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \qquad [u > 1\ ou\ u > -1]$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}u = \frac{\mp 1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \begin{bmatrix} - si\operatorname{sech}^{-1}u > 0{,}0 < u < 1 \\ + si\operatorname{sech}^{-1}u < 0{,}0 < u < 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} = \frac{\mp 1}{u\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad [-si\ u > 0, +si\ u < 0]$$

Notations:

Dérivées de seconde ordre: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$
Dérivées de troisième ordre: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$
Dérivées de nième ordre: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

Lois de Leibniz:

Soit D^p un opérateur de $\frac{d^p}{dx^p}$ donc $D^pu = \frac{d^pu}{dx^p}$:

$$D^n(uv) = uD^nv + \binom{n}{1}(Du)(D^{n-1}v) + \binom{n}{2}(D^2u)(D^{n-2}v) + \cdots + vD^nu$$

Où $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Comme cas particulier:

$\frac{d^2}{dx^2}(uv) = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}$
$\frac{d^3}{dx^3}(uv) = u\frac{d^3v}{dx^3} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^3u}{dx^3}$

Différentiels:

Soit y = f(x) et $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), alors$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon = \frac{dy}{dx} + \epsilon \text{ où } \epsilon \to 0 \; comme \; \Delta x \to 0.$$

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x$

Lois pour différentiels:

$d(u \pm v \pm w \pm \cdots) = du \pm dv \pm dw + \cdots$
$d(uv) = udv + vdu$
$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
$d(u^n) = nu^{n-1}du$
$d(\sin u) = \cos u \, du$
$d(\cos u) = -\sin u \, du$

XII) Intégrale

$\int \mathrm{a\,dx} = \mathrm{ax} + \mathrm{C}$

$\int \frac{1}{\mathrm{x}} \mathrm{dx} = \ln|\mathrm{x}| + \mathrm{C}$

$\int \mathrm{e^x\,dx} = \mathrm{e^x} + \mathrm{C}$

$\int \mathrm{a^x\,dx} = \frac{\mathrm{a^x}}{\ln \mathrm{a}} + \mathrm{C}$

$\int \ln \mathrm{x\,dx} = \mathrm{x} \ln \mathrm{x} - \mathrm{x} + \mathrm{C}$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, \mathbf{dx} = \ln(\sec x) + \mathbf{C} \;\; \mathbf{ou} - \ln(\cos x) + C$$
$$\int \cot \mathbf{x} \, \mathbf{dx} = \ln(\sin x) + \mathbf{C}$$
$$\int \sec \mathbf{x} \, \mathbf{dx} = \ln(\sec x + \tan x) + \mathbf{C}$$
$$\int \mathbf{csc} \, \mathbf{x} \, \mathbf{dx} = \ln (\csc x - \cot x) + \mathbf{C}$$
$$\int \sec^2(x) \mathbf{dx} = \tan \mathbf{x} + \mathbf{C}$$
$$\int \sec x \tan x \, \mathbf{dx} = \sec x + \mathbf{C}$$
$$\int \csc^2(x) \mathbf{dx} = -\cot(x) + \mathbf{C}$$
$$\int \csc x \cot x \, \mathbf{dx} = -\csc x + \mathbf{C}$$
$$\int \tan^2 x \, \mathbf{dx} = \tan x - x + \mathbf{C}$$
$$\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 - \mathbf{x}^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \mathbf{C}$$

XIII) Alphabet Grecs et constantes:

Alphabet Grec:

Nom Grecs	Lettre Grecs	
	Minuscule	Majuscule
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ε	E
Zêta	ζ	Z
Êta	η	H
Thêta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ

Omicron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Constantes:

$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ ....$

$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ .... = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = base\ naturel\ du\ logarithmique$

$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6512\ ... = Constante\ de\ l'Euler$

$= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$

$e^\gamma = 1{,}78107\ 24179\ 90197\ 9852\ ...$

$\sqrt{e} = 1{,}64872\ 12707\ 00128\ 1468\ ...$

$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}77245\ 38509\ 05516\ 02729\ 8167$ ... où Γ est la fonction gamma;

$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2{,}67893\ 85347\ 07748\ ...$

$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3{,}62560\ 99082\ 21908\ ...$

$1\ radian = \frac{180°}{\pi} = 57{,}29577\ 95130\ 8232\ ...°$

$1° = \frac{\pi}{180} radians = 0{,}01745\ 32925\ 19943\ 29576\ 92\ ... radians$

XIV) Produits et facteurs:

$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n+1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

$(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$

$x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

$$x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$
$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$
$$x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$$

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \cdots + y^{2n})$$
$$= (x-y)\left(x^2 - 2xycos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + y^2\right)\left(x^2 - 2xycos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + y^2\right)\ldots\left(x^2 - 2xycos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) + y^2\right)$$

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots + y^{2n})$$
$$= (x+y)\left(x^2 + 2xycos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + y^2\right)\left(x^2 + 2xycos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + y^2\right)\ldots\left(x^2 + 2xycos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) + y^2\right)$$

$$x^{2n} - y^{2n} = (x-y)(x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots)$$
$$= (x-y)(x+y)\left(x^2 - 2xycos\left(\frac{\pi}{n}\right) + y^2\right)\left(x^2 - 2xycos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + y^2\right)\ldots\left(x^2 - 2xycos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) + y^2\right)$$
$$x^{2n} - y^{2n} = \left(x^2 + 2xycos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + y^2\right)\left(x^2 + 2xycos\left(\frac{3\pi}{2n}\right) + y^2\right)\ldots\left(x^2 + 2xycos\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\right) + y^2\right)$$

$$\boldsymbol{(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yx + 2zx}$$

$$\boldsymbol{(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 3z^2x + 3zx^2 + 6xyz}$$

$$\boldsymbol{(x+y+z+w)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2yw + 2zw}$$

XV) Les opérateurs :

- **L'opérateur gradient:**

L'opérateur "nabla" ∇ *appliqué à un scalaire définit le gradient du scalaire. Il s'agit d'un vecteur. On le note* ∇p ou **grad**p[1] *ou* $\overrightarrow{grad}p$.

- En coordonnées cartésiennes

$$\nabla \mathrm{p} = \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{e_x} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{e_y} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{e_z} \text{ soit } \nabla \mathrm{p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \end{pmatrix} \mathrm{p}$$

On pose (e_x, e_y, e_z) étant les trois vecteurs unitaires pour les coordonnées cartésiennes (x, y, z).

- En coordonnées cylindriques

$$\nabla \mathrm{p} = \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{r}} \mathrm{e_r} + \frac{1}{\mathrm{r}} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \theta} \mathrm{e_\theta} + \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{e_z}$$

On pose $(\mathrm{e_r}, \mathrm{e_\theta}, \mathrm{e_z})$ étant les trois vecteurs unitaires pour les coordonnées cylindriques (r, θ, z).

- En coordonnées sphériques

$$\nabla \mathrm{p} = \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{r}} \mathrm{e_r} + \frac{1}{\mathrm{r}} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \theta} \mathrm{e_\theta} + \frac{1}{\mathrm{rsin}\theta} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \phi} \mathrm{e_\phi}$$

On pose $(\mathrm{e_r}, \mathrm{e_\theta}, \mathrm{e_\phi})$ étant les trois vecteurs unitaires pour les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).

- **L'opérateur divergence:**

Le produit scalaire de l''opérateur "nabla" ∇ *par un vecteur définit la divergence du vecteur. La divergence (également noté div) d'un vecteur est un scalaire. Pour le vecteur v , elle s'écrit :*

- En coordonnées cartésiennes

$$\nabla . v = div\ v = \frac{\partial v_x}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial v_y}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial v_z}{\partial \mathrm{z}}$$

  Avec $v = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$
- En coordonnées cylindriques

$$\nabla . v = div\ v = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial \mathrm{z}}$$

  Avec $v = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_z e_z$
- En coordonnées sphériques

$$\nabla . v = div\ v = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial \mathrm{r}} + \frac{1}{r sin(\theta)} \frac{\partial (sin(\theta) v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin(\theta)} \frac{\partial v_z}{\partial \mathrm{z}}$$

  Avec $v = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_\phi e_\phi$

- Quelques opérations

[1] En gras ce qui signifie que c'est un vecteur

Pour 2 vecteurs $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ *et* $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$*,le produit scalaire u.v=*$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}^t . \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

Donc $\nabla . v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial v_y}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial v_z}{\partial \mathrm{z}}$

- **L'opérateur laplacien :**

Il s'agit d'un opérateur différentiel, notée Δ, qui est appliqué à un scalaire.

- En coordonnées cartésiennes

$$\Delta p = \frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}^2}$$

- En coordonnées cylindriques

$$\Delta p = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{z}^2}$$

- En coordonnées sphériques

$$\Delta p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial p}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \theta^2}$$

- **L'opérateur rotationnel:**

Le produit vectoriel de l'opérateur "nabla" ∇ par un vecteur définit le rotationnel du vecteur. Le rotationnel (également noté rot) d'un vecteur est un vecteur. Pour le vecteur v, il s'écrit :

- En coordonnées cartésiennes

$$\nabla \wedge v = rotv = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)e_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)e_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)e_z$$

- En coordonnées cylindriques

$$\nabla \wedge v = rotv = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)e_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)e_z$$

- En coordonnées sphériques

$$\nabla \wedge v = rotv = \frac{1}{rsin\theta}\left(\frac{\partial (sin\theta v_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)e_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r v_{\phi)}}{\partial r}\right)e_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)e_\phi$$

- **Quelques relations:**

- $\boldsymbol{grad}(f.g) = f\boldsymbol{grad}(g) + g\boldsymbol{grad}(f)$
- $\boldsymbol{div}(f.\vec{g}) = fdiv(\vec{g}) + \boldsymbol{grad}(f).\vec{g}$
- $\boldsymbol{rot}(f\vec{g}) = f\boldsymbol{rot}(\vec{g}) + \boldsymbol{grad}(f)\wedge\vec{g}$

- $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\boldsymbol{grad}(f).\boldsymbol{grad}(g) + g\Delta f$
- $\mathrm{div}(\vec{f}\wedge\vec{g}) = \boldsymbol{rot}(\vec{f}).\vec{g} - \vec{f}.\boldsymbol{rot}(\vec{g})$
- $\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{rot}\,\vec{v}) = \boldsymbol{grad}(div\,\vec{v}) - \Delta\vec{v}$
- $div(\boldsymbol{rot}\,\vec{f}) = 0$
- **rot**(**grad** f) = $\vec{0}$
- $\boldsymbol{rot}(f\,\boldsymbol{grad}\,g) = \boldsymbol{grad}\,f \wedge \boldsymbol{grad}\,g$

➢ **Formules portant sur un champ:**

1. $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}U) = \vec{\nabla}^2U$ soit $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}U) = \Delta U$
2. $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}U) = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U) = \vec{0}$
3. $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}) = \vec{0}$ soit $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \vec{0}$
4. $\vec{\nabla}\wedge\overline{(\vec{\nabla}\wedge\vec{a})} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{a}) - \vec{\nabla}^2\vec{a}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \Delta\vec{a}$

➢ **Formules portant sur deux champs:**

1. $\vec{\nabla}(UV) = V\vec{\nabla}(U) + U\vec{\nabla}(V)$ soit $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(UV) = V\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U + U\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$
2. $\vec{\nabla}.(U\vec{a}) = \vec{a}(\vec{\nabla}U) + U(\vec{\nabla}.\vec{a})$ soit $\mathrm{div}(U\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U.\vec{a} + U\mathrm{div}\,\vec{a}$
3. $\vec{\nabla}\wedge(U\vec{a}) = (\vec{\nabla}U)\wedge\vec{a} + U(\vec{\nabla}\wedge\vec{a})$ soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(U\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U\wedge\vec{a} + U\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$
4. $\vec{\nabla}.(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}) - \vec{a}.(\vec{\nabla}\wedge\vec{b})$ soit $\mathrm{div}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} - \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}$
5. $\vec{\nabla}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\vec{\nabla}.\vec{b})\vec{a} - (\vec{\nabla}.\vec{a})\vec{b} + (\vec{b}.\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{b}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\mathrm{div}\,\vec{b})\vec{a} - (\mathrm{div}\,\vec{a})\vec{b} + (\vec{b}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{a} - (\vec{a}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{b}$
6. $\vec{\nabla}(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{b}) + \vec{b}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}) + (\vec{b}.\vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{b}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}\wedge(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{b}) + \vec{b}\wedge(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) + (\vec{b}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{a} + (\vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{b}$

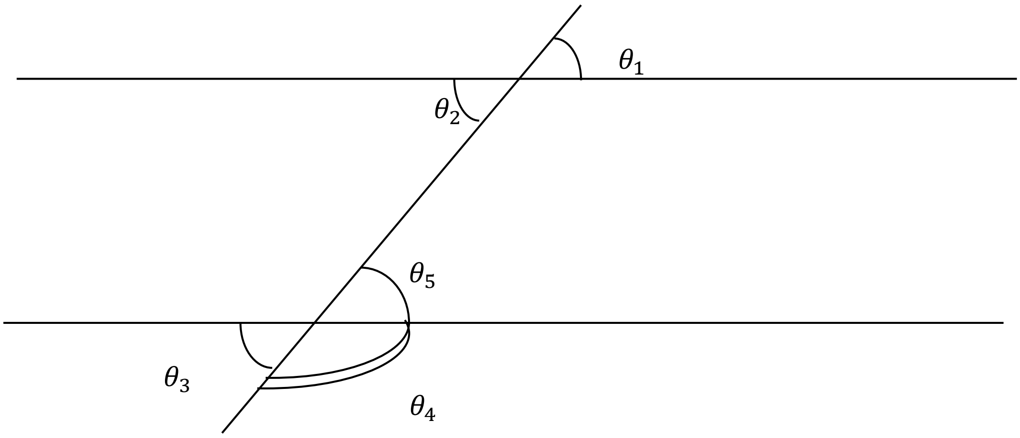
➢ **Produit vectoriel de deux vecteurs**

Pour 2 vecteurs $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ $et\ v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, le produit vectoriel

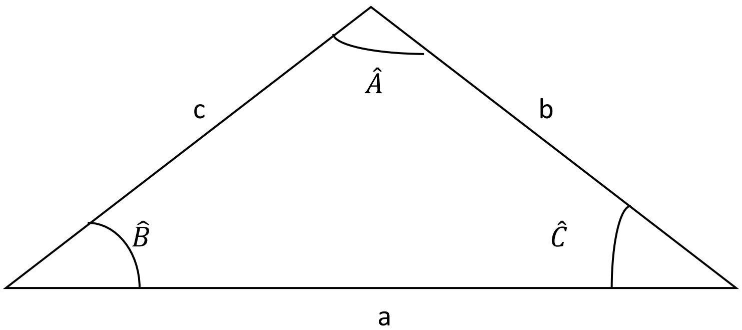
$$u\wedge v = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

XVI) Géométrie :

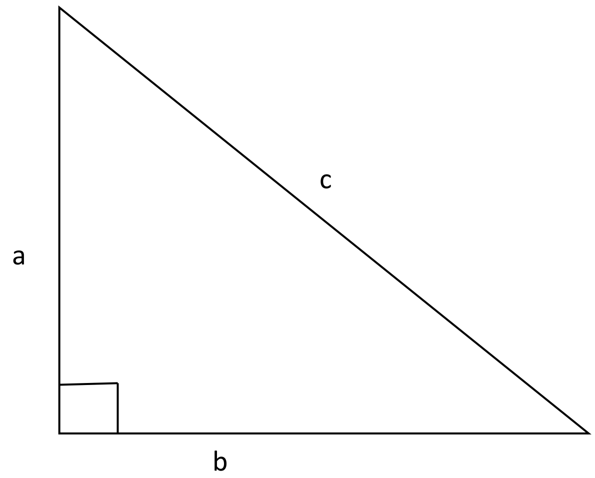
a) Relations élémentaires dans les triangles:



$\theta_1 = \theta_2$: angles opposés par le sommet
$\theta_1 = \theta_3$: angles alternes-externes
$\theta_1 = \theta_5$: angles correspondants
$\theta_2 = \theta_5$: angles alternes-internes
$\theta_3 + \theta_4 = \pi$: angles supplémentaires

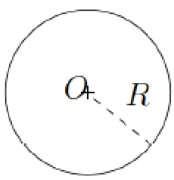


$$\sin\frac{\hat{A}}{a} = \sin\frac{\hat{C}}{c}$$
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\hat{C})$$



$a^2 + b^2 = c^2$

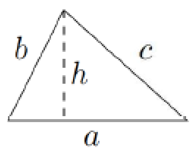
b) aires et volumes:
On note P comme le périmètre, S : surface et V : le volume;



$P = 2\pi R$

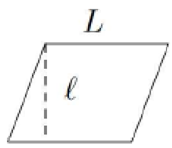
$S = \pi R^2$

disque



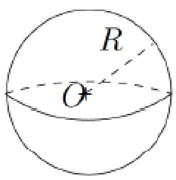
$S = ah/2$

triangle



$S = L\ell$

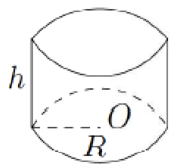
parallélogramme



$S = 4\pi R^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

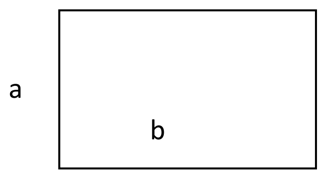
sphère



$S_{lat} = 2\pi Rh$

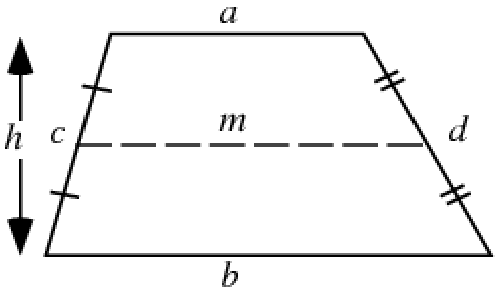
$V = \pi R^2 h$

cylindre



P= 2a +2b
S = ab

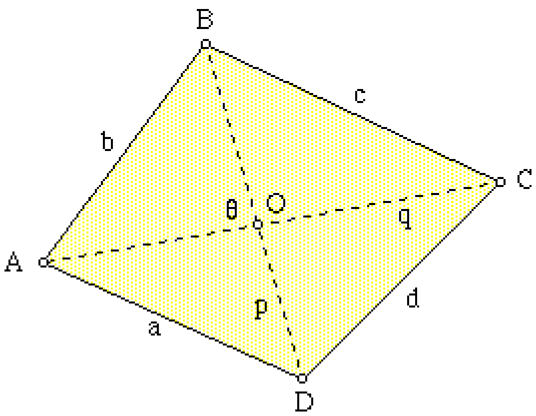
Rectangle



Trapèze

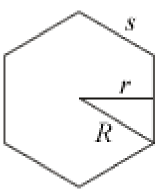
P = $a + b + h * (1/\sin\theta + 1/\sin\varphi)$
S = ½ (a+b) h = mh = $\frac{1}{4}\frac{b+a}{b-a}$
Centroïd : $\bar{x} = \frac{b}{2} + \frac{(2a+b)(c^2-d^2)}{6(b^2-a^2)}$

$$\bar{y} = \frac{(b+2a)h}{3(a+b)}$$



Quadrilateral
Avec BD = p, AC = q, A+B+C+D = 360°
P = a+b+c+d
S = P/2 = (a+b+c+d)/2

Aire:$\frac{1}{2} * q * (h_B + h_D) = \left(\frac{1}{2}\right) * p * q * sin\theta = \left(\frac{1}{4}\right) * (b^2 + d^2 - a^2 - c^2) * tan\theta =$
$\frac{1}{4}\sqrt{(4 * p^2 * q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2)}$



Polygonne Régulaire

Soit n : nombre de côté, s : la longueur d’un côté, r : apothem , R : rayon du cercle

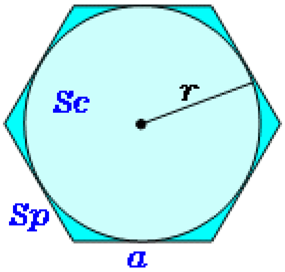
Angle central : $\theta = 2 * \frac{180°}{n} = 2 * \frac{\pi}{n}$

Périmètre : P = ns

Apotherm : $\frac{1}{2} s\ cot\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{1}{2} s\ cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$

R = $\frac{1}{2} s\ csc\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{1}{2} csc\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Aire : $\frac{1}{4} ns^2 \cot\left(\frac{180°}{n}\right) = nr^2 \tan\frac{180°}{n} = \frac{1}{2} nR^2 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$



Polygone régulier dans un cercle inscrit

Angle central : $\theta = 2 * \frac{180°}{n} = 2 * \frac{\pi}{n}$

Côté : $a = 2 * r * \sin(\frac{180°}{n})$

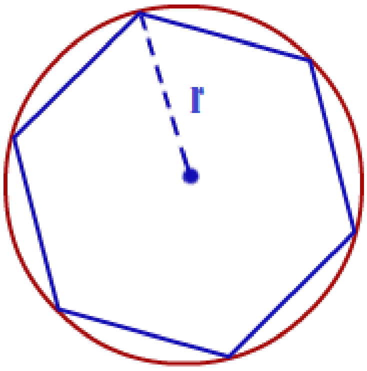
Apotherm : $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r * \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$

Périmètre : $2 * n * r * \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$

Aire : $\frac{1}{2} * n * r^2 * \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$

Avec n est le nombre de côté et r est le rayon du cercle

Polygone	Côté	Apotherm	Aire
n=3	$\sqrt{3}r$	1/2r	$3/4\sqrt{3}r^2$
n=4	$\sqrt{2}r$	$1/2\sqrt{2}r$	$2r^2$
n=5	½ $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ r	¼ $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}\, r$	5/8 $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\, r^2$
n=6	R	$1/2\sqrt{3}r$	$3/2\sqrt{3}r^2$
n=8	$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ r	$1/2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ r	$2\sqrt{2}r^2$
n=10	½$(\sqrt{5} - 1)r$	¼ $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\, r$	5/4 $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\, r^2$
n=12	$\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ r	$\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ r	$3r^2$



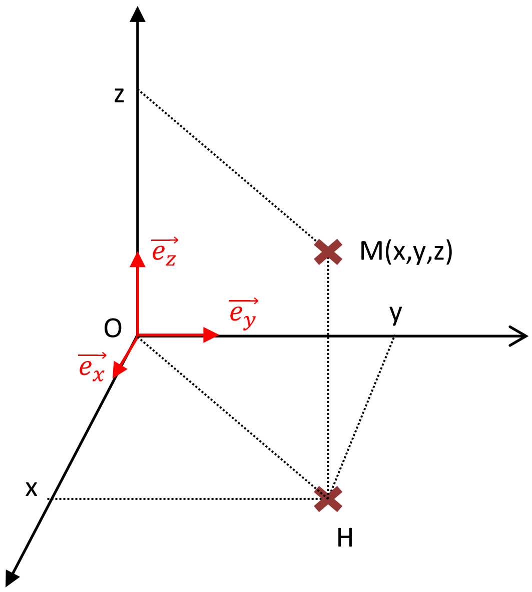
Polygone régulier sur un cercle
Angle central : $\theta = 2 * \frac{180°}{n} = 2 * \frac{\pi}{n}$
Périmètre : $2 * n * r * \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$
Aire : $\frac{1}{2} * n * r^2 * \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$

Avec n est le nombre de côté et r est le rayon du cercle

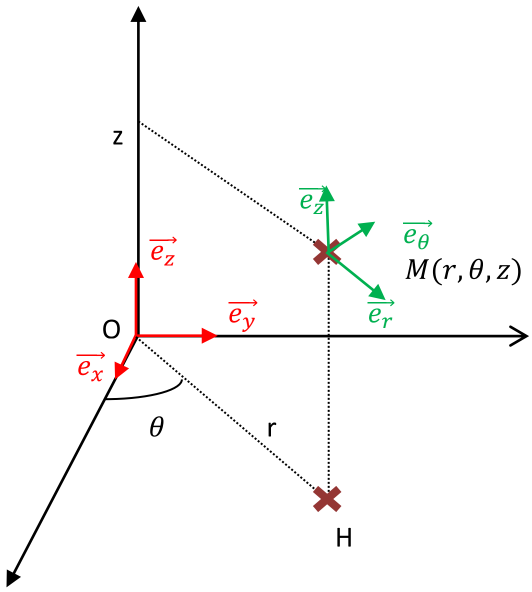
c) Systèmes de coordonnées :

Cartésiennes

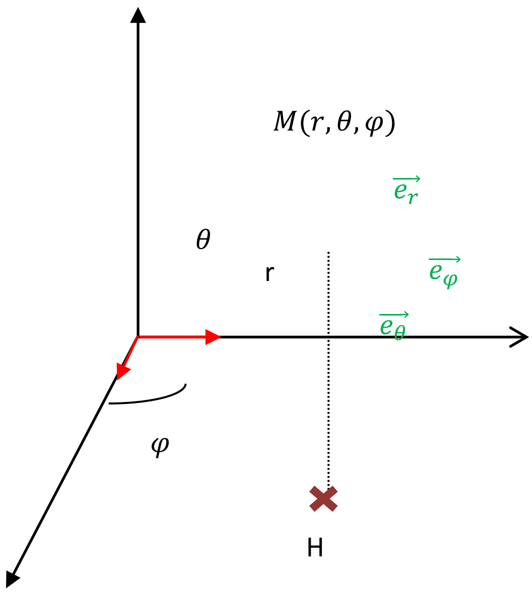
Cylindriques



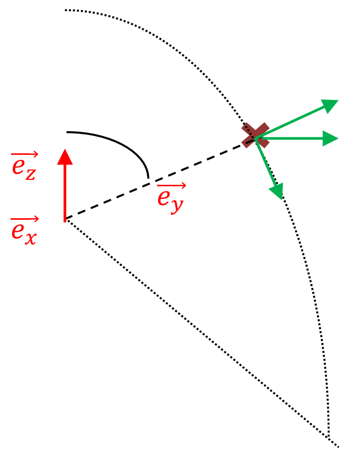
$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$



$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$$



Sphériques



$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

Les formules de changements de coordonnées entre le système cartésien et :

- Le système cylindrique:

$$x = r\cos(\theta)\,, y = r\sin(\theta)$$

- Le système sphérique :

$$x = r\cos(\theta)\cos(\varphi)\,, \qquad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)\,, \qquad z = \ r\cos(\theta)$$

XVII) Algèbre :

1.

a) Propriétés élémentaires des opérations algébriques usuelles:

Identités remarquables :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a-b)$

Fractions :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

Puissances :

$$a^0 = 1, \quad a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m b^m = (ab)^m, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Racines :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Logarithmes :

ln(ab) = ln(a) + ln(b), ln(a/b) = ln(a) – ln(b), ln(a^n) = n ln(a)
ln(e) = 1 avec e = 2,718... ln(1) = 0, $\log(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$

Exponentielles :

$$b = e^a \iff a = \ln(b), \quad \ln(e^a) = e^{\ln(a)} = a, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

Approximations pour x << 1:

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx, \quad e^x \simeq 1 + x, \qquad \ln(1+\mathrm{x}) \simeq x$$
$$\sin(x) \simeq x, \cos(x) \simeq 1, \tan(x) \simeq x \ \ (x \ en \ radian)$$

b) équations du second degré :
La résolution de l'équation algébrique du second degré (d'inconnue x)

ax² + bx +c =0 où $b, c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$
dépend du signe du discriminant de la forme : $\Delta = b^2 - 4\,ac$

Lorsque $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ \ et \ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Lorsque $\Delta = 0$: l'équation admet une unique solution réelle

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Lorsque $\Delta < 0$: l'équation admet deux solutions complexes distinctes

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \ \ et \ x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

c) équations différentielles:

1. Équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre :

$$y' + \alpha y = 0, \forall \, \alpha \in \mathbb{C}$$

La solution générale s'écrit sous la forme :

y(x) = A exp(-αx), où A est une constante complexe

2. équations différentielles linéaires homogènes du deuxième ordre :

$$y'' + 2\beta y' + \gamma y = 0, \forall \, \beta, \gamma \ \in \mathbb{C}$$

La solution générale dépend du signe de $\Delta' = \beta^2 - \gamma$:

Si $\Delta' > 0$: $y(x) = e^{-\beta x}(Ae^{\sqrt{\Delta'}x} + Be^{-\sqrt{\Delta'}x})$
Si $\Delta' = 0$: $y(x) = e^{-\beta x}(Ax + B)$
Si $\Delta' < 0$: $y(x) = e^{-\beta x}\left(Acos\left(\sqrt{|\Delta'|}x\right) + Bcos\left(\sqrt{|\Delta'|}x\right)\right)$
Ou $y(x) = e^{-\beta x}\left(C\, e^{i\sqrt{|\Delta'|}x} + De^{-i\sqrt{|\Delta'|}x}\right)$

3. Équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre :

$$y' + \alpha y = E(x), \forall\, \alpha \in \mathbb{C}^*$$

La fonction E(x), a priori quelconque, est qualifiée second membre de l'équation différentielle. La solution générale s'écrit comme la somme y = y_0 + y_p de la solution générale $y_0(x) = Ae^{-\alpha x}$ (A étant constante) de l'équation homogène associée et d'une solution particulière y_p qui peut prendre la forme suivante:

(a) Si E est constante : $y_p(x) = \frac{E}{\alpha}$
(b) Si E est quelconque : $y_p(x) = e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha y}E(y)dy$
2. Algèbre générale

A) Utilisation de la somme, intersection, l'union et binôme de newton

<u>Produit de sommes</u>

Si $n \in \mathbb{N}^*\ et\ a_1, \dots, a_n,\ b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) * \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\, b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{\substack{i,j \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} a_i b_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i \leq i < j \leq n} a_i a_j = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} a_i a_j$$

<u>Sommes classiques</u>

$Si\ a, b \in \mathbb{Z}\ avec\ a \leq b, x, y, q \in \mathbb{R}, et\ n \in \mathbb{N}^*.$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=a}^{b} k = \frac{a+b}{2}(b - a + 1) = (\text{moyenne des extrêmes})*(\text{nombre de termes})$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\quad et\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = \begin{cases} q^a \dfrac{1-q^{b-a+1}}{1-q} si\ q \neq 1 \\ b-a+1\ \ si\ q=1 \end{cases} \quad soit \sum_{k=a}^{b} q^k = \begin{cases} q^{1er\ indice} \dfrac{1-q^{Nb\ de\ termes}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ Nb\ de\ termes & si\ q=1 \end{cases}$$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$$

XVIII) Théorèmes et définitions :

1. Limites et continuités

Une fonction y = f(x) est continue à x =a si :

i) f(a) est définie exacte
ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe et
iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Sinon, f est discontinue à x = a.

La limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si les deux limites sont égaux :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a\prime} f(x) = L = \lim_{x\to a-} f(x)$$

2. Intermédiaire :

Une fonction y = fx() qui est continue sur un intervalle fermé [a,b] et prend les valeurs entre f(a) et f(b).

Note : *Si f est continue sur [a,b] et f(a) et f(b) défini son signe, alors l'équation f(x) = 0 a au moins une solution dans un intervalle ouvert (a,b).*

3. Limites de fonction rationnelle comme $x \to \pm\infty$

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si le degré de f(x) < au degré de g(x)

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^3+3} = 0$$

ii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ est infinie si le degré de f(x) > au degré de g(x)

Exemple:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x}{x^2-8} = \infty$$

iii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ est finie di le degré de f(x) est égale au degré de g(x)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+2}{10x-5x^2} = -\frac{2}{5}$$

4. Asymptotes horizontale et verticale

i) Une ligne y = b est une asymptote horizontale de graphe de y = f(x) si seulement la $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$.

ii) Une ligne x =a est une asymptote verticale de graphe de y = f(x) si seulement la limite $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \; ou \; \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

5. Le taux accroissement

i) Le taux accroissement moyen : Si (x_0,y_0) et (x_1,y_1) sont des points du graphe de y = f(x) alors le taux d'accroissement moyen de y avec x sur l'intervalle $[x_0,x_1]$ est alors :

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ii) Le taux changement : Si (x_0,y_0) est un point sur le graphe de y = f(x), alors le taux de changement de y avec respect de x à x_0 est $f'(x_0)$.

6. Définition de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \; ou \; f'(x) = \lim_{h\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La première définition de la dérivée est un taux instantanée de f(x).

7. La limite du nombre e

i) $\lim_{n\to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$= e

ii) $\lim_{n\to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}}$=e

8. Le théorème de Rolle

Si f est continue sur [a,b] et différentiable sur (a,b) pour que f(a) = f(b), alors il y a au moins c dans un intervalle (a,b) pour que f'(c) = 0.

9. Théorème de la valeur moyenne

Si f est continue sur [a,b] et différentiable sur (a,b), alors il y a au moins un nombre c dans (a,b) pour que $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$.

10. Valeur extrême

Si f est continue sur un intervalle fermé [a,b], alors f(x) a deux maximum et un minimum sur [a,b].

11. Pour trouver le maximum et minimum des valeurs d'une fonction y = f(x) locale.

i) Le(s) point(s) où f'(x) changent de signe. Pour trouver un premier candidat où f'(x) = 0 ou est infinie ou n'est pas existent.

ii) Le point finale, si n'est pas existent sur le domaine de f(x);

On compare les valeurs de la fonction à tout points pour trouver les maximums et minimums.

12. Soit f est différentiable pour a<x<b et continue pour $a \leq x \leq b$.

i) f'(x) >0 pour chaque x dans un (a,b), alors f est croissant sur [a,b].

ii) f'x) <0 pour chaque x dans un (a,b), alors f est décroissant sur [a,b].

13. On suppose que f''(x) existe sur l'intervalle (a,b).

i) Si f''(x) >0 dans (a,b), alors f est concave vers le haut dans (a,b).
ii) Si f''(x) <0 dans (a,b), alors f est concave vers le bas dans (a,b).

Localement les points d'infection de y= f(x), trouver les points où f''(x) =0 où f''(x) est existent. Ce sont l'endroit un candidat de la fonction f(x) a un point inflexion;

14. Approximation locale linéaire et approximative

L'approximation linéaire de f(x) proche de x = x_0 est donnée par y = f(x_0) + f'(x_0) (x-x_0).

Pour estimer la pente d'un graphe à un point on dessine la ligne de tangente pour graphe à un point.

15. Comparaison des taux

La fonction exponentiel y = e^x grandit très rapidement comme $x \to \infty$ tant que la fonction logarithmique y = ln x grandit très lentement comme $x \to \infty$.

Les fonctions exponentielle par exemple y = 2^x ou y = e^x grandit plus grand comme $x \to \infty$ que la puissance positif. La fonction y = ln x grandit lentement comme $x \to \infty$.

Nous disons que $x \to \infty$:

i) f(x) grandit plus rapide que g(x) si la limite $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ou si $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Si f(x) grandit plus rapide que g(x) comme $x \to \infty$, alors g(x) grandit comme lentement que f(x) comme $x \to \infty$.

ii) f(x) et g(x) grandit au taux d'échantillon comme $x \to \infty$ si la limite i $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$

16. Fonctions inverse

1. Si f et g sont deux fonctions tel que f(g(x)) = x pour chaque x dans le domaine de g et g(f(x)) = x, pour chaque x dans le domaine de f, alors f et g sont des fonctions inverses.

2. Une fonction f a une fonction inverse si et seulement si l'intersection horizontale du graphe.

3. Si f est une augmentation ou une baisse de l'intervalle, alors f est une fonction inverse dans l'intervalle.

4. Si f est différentielle à chaque point sur un intervalle I et f'(x) $\neq 0$ sur I., alors g = $f^{-1}(x)$ est différentiable à chaque point de l'intervalle intérieur f(I) et g'(x) = 1/f'(x).

17. Propriétés de e^x

1. La fonction exponentielle y = e^x est une fonction inverse de y = ln x.
2. Le domaine est tout nombre réel de $-\infty < y < \infty$.
3. L'intervalle est tout nombre positive y>0.
4. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
5. y = e^x est continue, croissant et concave vers le haut pour tous x.
6. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \; et \; \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
7. $e^{\ln x} = x$ pour x>0; $\ln(e^x) = x \; pour \; tous \; x$

18. Propriétés de ln x

1. Le domaine de y = ln x est un nombre positives x>0
2. L'intervalle de y = ln x est tout nombre de $-\infty < y < \infty$.
3. y = ln x est continue, croissant et concave vers le bas.
4. ln(ab) = ln a + ln b
5. ln(a/b) = ln a – ln b
6. ln a^r = r ln a
7. y = ln x <0 si 0<x<1 et ln x >0 si x>1.
8. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \; et \; \lim_{x \to -\infty} \ln x = -\infty$
9. $log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

19. Règle Trapézoïdale

Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé [a,b] où [a,b] a été partitionnée de n sous intervalle $[x_0,x_1]$, $[x_1, x_2]$ … $[x_{n-1},x_n]$, à chaque longueur de (b-a)/n, alors $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

20. Propriétés de l'intégrale définie

Soit f(x) et g(x) sont continues sur [a,b].

1. $\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, c $est\; une\; constante\; différent\; de$ 0.
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, où f $est\; continue\; sur\; un\; intervalle\; constraint\; les\; nombres\; a, b\; et\; c$.
5. Si f(x) est une fonction paire, alors $\int_a^a f(x)dx = 0$.
6. Si f(x) est une fonction impaire, alors $\int_a^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
7. Si $f(x) \geq 0 \; sur \; [a,b], alors \; \int_a^b (fx)dx > 0$
8. Si $g(x) \geq f(x) sur\; [a,b]$, alors $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$

21. Définition de l'intégrale définie comme une Somme

On suppose que la fonction f(x) est continue sur un intervalle fermé [a,b]. Division l'intervalle n égale au sous-intervalle, de longueur $\Delta x = \frac{b-a}{b}$. On choisit un nombre dans chaque sous-intervalle.
Soit alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$.

22. La vitesse, accélération, distance

1. La vitesse : v(t) =x'(t)= dx/dt
2. accélération : a(t) x"(t)=v'(t)=$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
3. v(t) =$\int a(t)dt$
4. x(t) =$\int v(t)dt$

23. La valeur moyenne

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

XIX) Les nombres complexes :

On la définit comme $i = \sqrt{-1}$

Notation exponentielle :$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$

Théorème de Moivre : $[r(cos\theta + isin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

La racine complexe nième:

Si $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ alors$
$z^{1/n} = \sqrt[n]{re^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}}, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

XX) Les séries :

La puissance des nombres:
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1);\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$

Arithmétique : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a+kd) = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$
Géométrie (convergent pour -1<r<1)
$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\ S_\infty = \frac{a}{1-r}$

Binomial (convergent pour |x| < 1)

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}x^r + \cdots$$

Où $\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$

Séries de Maclaurin :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f"(0)+\cdots+\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+R_{k+1}$$

Où $R_{k+1}=\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\theta x), 0<\theta<1.$

Séries de Taylor :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f"(a)+\cdots+\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_{k+1}$$

Où $R_{k+1}=\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a+\theta h), 0<\theta<1.$

Ou

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f"(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+R_{k+1}$$

Où $R_{k+1}=\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0+(x-x_0)\theta), 0<\theta<1.$

Les séries connues:

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots$ (pour tous x)
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}+\cdots$ (pour tous x)
$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!}+\cdots$ (pour tous x)

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots$ $(|x|<\frac{\pi}{2})$
$\sin^{-1} x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ $(|x|<1)$
$\tan^{-1} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ $(|x|<1)$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (-1<x\leq 1)$
$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$ (pour tous x)
$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ (pour tous x)
$\tanh x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\cdots$ $(|x|<\frac{\pi}{2})$
$\sinh^{-1} x=x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ $(|x|<1)$
$\tanh^{-1} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

XXI) Les transformées de LAPLACE :

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Fonction	Transformée	Fonction	Transformée
1	$\frac{1}{s}$	$H_\alpha(t) = H(t-\alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\delta(t)$	1
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$e^{\alpha t} \sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s-\alpha)^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$e^{\alpha t} \cosh \omega t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\omega^2}$

Soit $\tilde{f}(x) = \mathcal{L}\{f(t)\}\ alors$
$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \tilde{f}(s-a)$,
$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}(\tilde{f}(s))$,
$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{x=s}^{\infty} \tilde{f}(x)\, dx$ si c'est exacte

Dérivées et intégrales

Soit y = y(t) et soit $\tilde{y} = \mathcal{L}\{y(t)\}$ alors
$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = s\tilde{y} - y_0$,
$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2\tilde{y} - sy_0 - y'_0$,
$\mathcal{L}\left\{\int_{\tau=0}^{t} y(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\tilde{y}$

Déplacement temporaire

Soit $g(t) = H_a(t)f(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t > a \end{cases}$

Alors

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}\tilde{f}(s)$$

Changement d'échelle

$$\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k}\tilde{f}(\frac{s}{k})$$

Fonctions périodique

Soit f(t) est de période T alors

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_{t=0}^{T} e^{-st} f(t)dt$$

Convolution

Soit $f(t) * g(t) = \int_{x=0}^{t} f(x)g(t-x)dx = \int_{x=0}^{t} f(t-x)g(x)dx$
Alors

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$$

Valeurs limites

Théorème de base

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\tilde{f}(s)$$

Le théorème final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0+} s\tilde{f}(s)$$

$$\int_{0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{s\to 0+} s\tilde{f}(s)$$

XXII) Les transformées Z :

$$Z\{f(t)\} = \tilde{f}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

Fonction	Transformée	Fonction	Transformée
$\delta_{t,nT}$	$z^{-n}(n>0)$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$te^{-at}\sin\omega t$	$\frac{Tze^{-aT}(z-e^{-2aT})\sin\omega T}{(z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT})^2}$
t^2e^{-at}	$\frac{T^2ze^{-aT}(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$	$te^{-at}\cos\omega t$	$\frac{Tze^{-aT}(z^2\cos\omega T-2ze^{-aT}+e^{-2aT}\cos\omega T)}{(z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT})^2}$
$\sinh at$	$\frac{z\sinh aT}{z^2-2zcosh\, aT+1}$		
$\cosh at$	$\frac{z(z-\cosh aT)}{z^2-2zcosh\, aT+1}$		

Théorème du décalage

$$Z\{f(t+nT)\} = z^n\tilde{f}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k}f(kT) \quad (n>0)$$

Formule inverse

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\, \tilde{f}(e^{i\theta})d\theta$$

XXIII) Séries de Fourier et transformées de Fourier :

Séries de Fourier

$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos n\omega t + b_0 \sin n\omega t\}$ (période $T = \frac{2\pi}{\omega}$)
Où

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t\, dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

Quelques séries

Série de sinus $a_n = 0$, $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t\, dt$

Série de cosinus $b_n = 0$, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t\, dt$

Transformée de Fourier finie

Du sinus :

$$\tilde{f}_s(n) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t\, dt$$
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_s(n)\sin n\omega t$$

Du cosinus :

$$\tilde{f}_c(n) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t\, dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2}\tilde{f}_c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_c(n)\cos n\omega t$$

Intégrale de Fourier :

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\nearrow 0} f(t) + \lim_{t\searrow 0} f(t)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du\, d\omega$$

Intégrale de la Transformée de Fourier:

$$\tilde{f}(\omega) = F\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) du$$

$$f(t) = F^{-1}\{\tilde{f}(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} \tilde{f}(\omega) d\omega$$

XXIV) Formules numérique :

Itération

Méthode de Newton Raphson pour une approximation de la racine x_0 de f(x) = 0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Particularité des cas pour trouver $\sqrt{N}$ utile $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$.

Méthode séquentielle :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\left(\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right)}$$

Interpolation

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \ \delta f_n = f_{n+\frac{1}{2}} - f_{n-\frac{1}{2}}$$

$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}, \quad \mu f_n = \frac{1}{2}\left(f_{n+\frac{1}{2}} + f_{n-\frac{1}{2}}\right)$

Formule de Newton Gregorio

$$f_p = f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{p!}{(p-r)!\,r!}\Delta^r f_0$$

Où $p = \frac{x - x_0}{h}$

Formule de Lagrange

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x)$$

Où

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)}$$

Différentiation numérique

$$hf'_0 = \mu\delta f_0 - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f_0 + \frac{1}{30}\mu\delta^5 f_0 - \cdots$$
$$h^2 f''_0 = \delta^2 f_0 - \frac{1}{12}\delta^4 f_0 + \frac{1}{90}\delta^6 f_0 - \cdots$$

$$hf'_0 = \Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 f_0 - \cdots$$
$$h^2 f"_0 = \Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0 + \cdots$$

Intégration numérique

Règle de Trapezium $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + E$
Où $f_i = f(x_0 + ih)$, $E = -\frac{h^3}{12} f"(a)$, $x_0 < a < x_0 + h$
Composition de règle Trapezium

$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f_0 + 2\,f_1 + 2f_2 + \cdots 2f_{n-1} + f_n\} - \frac{h^2}{12}(f_n' - f_0') + \frac{h^4}{720}(f_n''' - f_0''') \ldots$
Où $f_0' = f'(x_0), f_n' = f'(x_0 + nh), etc$

Règle de Simpson $\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + E$
Où $E = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(a) \quad x_0 < a < x_0 + 2h$

Composition de règle de Simpson (n paire)

$$\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) + E$$
Où $E = -\frac{nh^5}{180} f^{(4)}(a) \quad x_0 < a < x_0 + nh$

Gauss ordre 1 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2f(0) + E$

Où $E = \frac{2}{3} f"(a), \quad -1 < a < 1$

Gauss ordre 2 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + E$
Où $E = \frac{1}{135} f'^{v}(a), \quad -1 < a < 1$

Équation différentielle

La solution de y'=f(x,y) donnent la condition initiale y_0 à x_0, $x_n = x_0 + nh$.

Méthode Euler suivant :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Méthode Euler :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Rung Kutta ordre 2 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Où $K_1 = f(x_n, y_n)$

$K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hK_1}{2}\right)$
$K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hK_2}{2}\right)$
$K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)$

Polynômes de Chebyschev
$T_n(x) = \cos[n(\cos^{-1} x)]$
$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$
$U_{n-1}(x) = \frac{T_n'(x)}{n} = \frac{\sin[n(\cos^{-1} x)]}{\sqrt{1-x^2}}$

$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$
$T_{n+1(x)} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
$U_{n+1(x)} = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$
$\int T_n(x)dx = \frac{1}{2}\{\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\} + constant, \qquad n \geq 2$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \cdots a_jT_j(x) + \cdots$$

Où $a_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)cosj\theta d\theta \qquad j \geq 0$

Et $\int f(x)dx = constant + A_1T_1(x) + A_2T_2(x) + \cdots A_jT_j(x) + \cdots$
Où $A_j = \frac{(a_{j-1}-a_{j+1})}{2j} \qquad j \geq 1$

XXIV) Formule vectorielle :

Le produit scalaire a.b =$ab\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Produit vectorielle $a \times b = ab\sin\theta\hat{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

= $(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$

Produit Triple

$$[a,b,c] = (a \times b).c = a.(b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times (b \times c) = (a.c)b - (a.b)c$$

Calculs vectorielles

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$grad\ \Phi \equiv \nabla\Phi, \ \mathrm{div}\ \mathrm{A} \equiv \nabla.\mathrm{A}, \ \ \mathrm{curl}\ \mathrm{A} \equiv \nabla \times \mathrm{A}$
$div\ grad\Phi \equiv \nabla.(\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi$
$div\ curl\ A = 0 \qquad curl\ grad\ \Phi \equiv 0$
$\nabla^2 A = grad\ div\ A - curl\ curl\ A$

$\nabla(\alpha\beta) = \alpha\nabla\beta + \beta\nabla\alpha$
$div\ (\alpha A) = \ \alpha\ div\ A + A.(\nabla\alpha)$
$curl\ (\alpha A) = \ \alpha\ curl\ A - A \times (\nabla\alpha)$
$div\ (A \times B) = B.curl\ A - .curl\ B$
$curl\ (A \times B) = A\ div\ B - B\ div\ A + (B.\nabla)A - (A.\nabla)\mathrm{B}$
$grad\ (A.B) = A \times curl\ B + B \times curl\ A + (A.\nabla)B + (B.\nabla)A$

Théorème d'intégralle

Théorème divergence $\int_{surface} A.dS = \int_{volume} div\ A\ dV$

Thèorème Stokes

$$\int_{surface} (curl\ A).dS = \int_{contour} A\ dr$$

Théorème de Green

$$\int_{volume} (\psi\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\psi).dV = \int_{surface} (\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n})\ |dS|$$

$$\int_{volume} \{\psi\nabla^2\phi + (\nabla\phi)(\nabla\psi)\}.dV = \int_{surface} \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}|dS|$$

Où dS = $\hat{n}|dS|$

XXV) Mécaniques :

Kinematics

Mouvement, constante accélération

v = u + ft, $s = ut + \frac{1}{2}ft^2 = \frac{1}{2}(u+v)t$

Solution générale de $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x\ est$

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t = R\sin(\omega t + \phi)$$

Où R = $\sqrt{a^2 + b^2}\ et \cos\phi = \frac{a}{R}, \sin\phi = \frac{b}{R}$
Coordonnées polaires de la vitesse est $(\dot{r}, r\dot{\theta}) = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$ et
l'accélération est $[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}^2] = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}^2)e_\theta$.

Centre de masse

Hémisphère shell, de rayon r : 1/2 r
Hémisphère, de rayon r : 3/8 r
Un cône : 3/4 h